

УДК 531.31, 534, 621.313.

Подлесний С. В.

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ГАЛЬМА

Електротехнічні системи оточують нас у повсякденному житті. В якості прикладів таких систем можна привести: електромагнітні гальма, електроприводи колодкових гальм на транспорті і в ліфтах, запірні пристрої, електромагніти гідроклапанів і високовольтних силових вимикачів, електромагнітні муфти і т.п.

Установка електромагнітного гальма дає можливість стрімко зупиняти інерційне навантаження і утримувати механізм в нерухомому стані при відключеному силовому живленні мотора, що потрібно для дотримання вимог до безпеки ряду індустриального обладнання. Існує кілька типів гальм: з залежним і незалежним живленням. Залежне і незалежне живлення гальма визначає тип його підключення до джерела енергії. При залежному живленні гальмо підключається до обмотки мотора, а при незалежному – до зовнішнього джерела живлення.

Існують вбудовані і прибудовані електромагнітні гальма. Конструктивна особливість моторів з вбудованим гальмом полягає в тому, що за рахунок особливої конструкції ротора і вала, основна частина електромагнітного гальма розташовується всередині самого мотора. Зовні під кожухом знаходиться тільки гальмівний диск-вентилятор.

Для раціонального конструювання та подальшого аналізу властивостей таких систем сучасна інженерна практика вимагає створення коректних математичних моделей, які повинні містити диференціальні рівняння механічного руху, а також рівняння електромагнітних процесів, які, як правило, складаються з використанням математичного апарату рівнянь Лагранжа-Максвелла.

Саме моделювання здійснювалося з використанням різних пакетів прикладних програм (ППП), таких як Simulink (середовища MATLAB), Mathcad, MAPC і ін. Розгляду цього питання приділялася і приділяється досить велика увага [1–5]. Однак, зовсім не зайвим буде розширення створення і використання математичних моделей різних електромеханічних систем.

Метою даної роботи є розробка на основі використання апарату Лагранжа-Максвелла динамічної математичної моделі електромагнітного гальма, в основу якого входить електромагніт постійного струму, який буде приводним пристроєм гальмівної колодки, і реалізація цієї моделі в системі комп'ютерної алгебри Mathcad.

Електромагнітне гальмо представлено на рис. 1.

Гальмівна колодка електромагнітного гальма, розташованого в вертикальній площині, приводиться в рух коромислом BC, яке було скріплене шарніром B з кривошипом OA (рис. 1). До кривошипа OA жорстко прикріплений постійний магніт NS, який при подачі на обмотку соленоїда постійної напруги u втягується всередину соленоїда. При знеструмленому соленоїді кривошип OA займає горизонтальне положення, спираючись на опору A_1 , а колесо вільно обертається навколо осі, що проходить через точку O_1 . Сумарна вага кривошипа OA і постійного магніту NS P_1 прикладена в точці E, вага коромисла BC P_2 прикладена в середині BC – точці G, а вага гальмівної колодки P_3 – в точці C. Пронумеруємо ланки механізму: кривошип OA – 1, коромисло – 2, гальмівна колодка – 3. Позначимо через J_1, J_3 моменти інерції першого і третього тіла системи щодо своїх осей обертання, а через J_2 – момент інерції коромисла щодо центра мас G. Нехай довжини ланок механізму рівні $OB = BE = EA = r_1, BC = r_2, CD = r_3$.

Електрична частина пристрою утворена джерелом постійної напруги і обмоткою соленоїда. Позначимо через L_{11} коефіцієнт самоіндукції обмотки соленоїда, через R – омичний опір середовища. Замінімо постійний магніт – соленоїдом з постійним струмом i_0 і позначимо через L_{10} коефіцієнт взаємної індукції обмотки соленоїда з контуром еквівалентного струму i_0 .

Складемо рівняння Лагранжа-Максвелла для електромагнітного гальма. Механічна частина системи є шарнірний чотириланковий механізм (кривошипно-коромисловий), який, як відомо, представляє систему з одним ступенем свободи. Електрична частина системи містить один контур із змінним струмом. Як узагальнену координату електромеханічної системи вибираємо кут повороту φ кривошипа ОА і струм i в обмотці соленоїда.

Кінетична енергія системи складається з кінетичної енергії T_1 кривошипа ОА, кінетичної енергії T_2 коромисла ВС і кінетичної енергії T_3 гальмівної колодки CD.

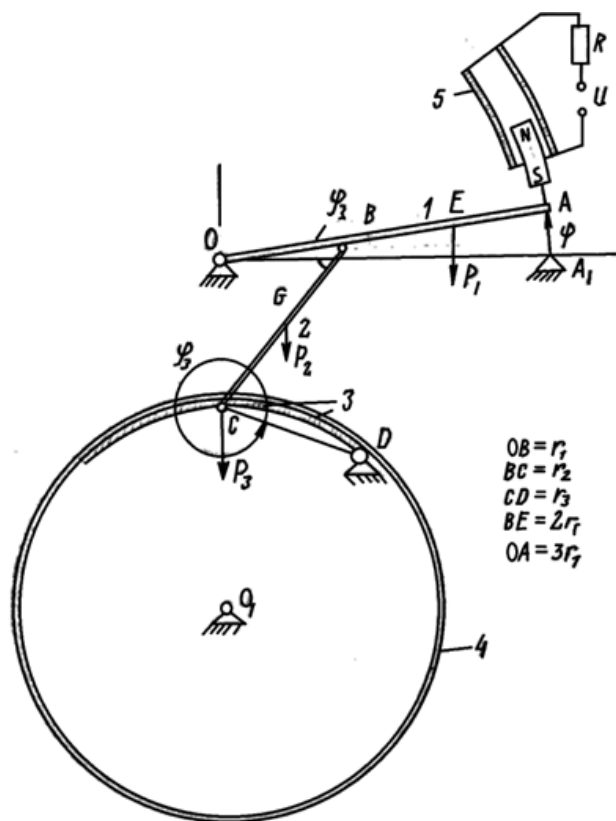


Рис. 1. Електромагнітне гальмо:

1 – кривошип; 2 – коромисло; 3 – гальмівна колодка; 4 – колесо; 5 – соленоїд

Кривошип і гальмівна колодка здійснюють обертальний рух, тому:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 \Omega_{3z}^2, \quad \Omega = \dot{\varphi}, \quad \Omega_{3z} = \dot{\varphi}_3, \quad (1)$$

де φ_3 – кут повороту колодки навколо полюса С.

Коромисло ВС здійснює плоскопаралельний рух, тому:

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_{2z}^2; \quad \Omega_{2z} = \dot{\varphi}_2,$$

де v_C – швидкість центру мас коромисла; φ_2 – кут повороту коромисла навколо полюса В. Отже, повна кінетична енергія системи:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_{2z}^2 + \frac{1}{2} J_3 \Omega_{3z}^2. \quad (2)$$

Виразимо кутові швидкості Ω_{2z} , Ω_{3z} і швидкість точки G через узагальнену координату φ і кутову швидкість Ω . Для цього складемо кінематичні рівняння для шарнірного чотириланника $OBCD$. Відповідно до відомих формул кінематики:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 + [\bar{\Omega}, \overline{OB}]; \quad \bar{v}_C = \bar{v}_B + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}]; \quad \bar{v}_D = \bar{v}_C + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}].$$

Послідовно виключаючи швидкості в проміжних точках, отримуємо:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_0 + [\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}] + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}].$$

З огляду на те, що $\bar{v}_D = \bar{v}_0 = 0$, маємо:

$$[\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}] + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}] = 0.$$

Проектуючи цю векторну рівність на осі координат, одержуємо:

$$\begin{aligned} -\Omega r_1 \sin \varphi - \Omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 - \Omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3 &= 0; \\ \Omega r_1 \cos \varphi + \Omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2 + \Omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Помноживши 1-е рівняння (3) на $\cos \varphi_3$, 2-е рівняння на $\sin \varphi_3$ і складаючи, знайдемо:

$$\Omega_{2z} = \Omega \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_3)}{r_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Аналогічно визначаємо кутову швидкість гальмівної колодки:

$$\Omega_{3z} = \Omega \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_2)}{r_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Нарешті, випишемо рівняння для швидкості центру мас коромисла:

$$\bar{v}_G = [\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BG}].$$

Проектуючи це векторне співвідношення на осі координат, одержуємо:

$$v_{Gx} = -\Omega r_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} \Omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2;$$

$$v_{Gy} = -\Omega r_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} \Omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2;$$

$$v_G^2 = \Omega^2 r_1^2 + \Omega \Omega_{2z} r_1 r_2 \cos(\varphi - \varphi_2) + \frac{1}{4} \Omega_{2z}^2 r_2^2.$$

З фізичного змісту задачі ясно, що кути φ , φ_2 , φ_3 в процесі роботи системи змінюються незначно, тому замінимо в знайдених кінематичних співвідношеннях кути φ , φ_2 , φ_3 їх початковими значеннями $\varphi_1^0 = 0$, φ_2^0 , φ_3^0 . Тоді після підстановки в (2) отримуємо:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2;$$

$$J = J_1 + \frac{P_2 r_1^2}{g} \left[1 + \frac{\cos \varphi_2^0 \sin \varphi_3^0}{\sin(\varphi_2^0 - \varphi_3^0)} + \frac{(\sin \varphi_3^0)^2}{4(\sin(\varphi_3^0 - \varphi_2^0))^2} \right] + r_1^2 \frac{J_2 r_3^2 (\sin \varphi_3^0)^2 + J_3 r_2^2 (\sin \varphi_2^0)^2}{r_2^2 r_3^2 (\sin(\varphi_3^0 - \varphi_2^0))^2}. \quad (4)$$

Величина J носить назву приведенного моменту інерції і при точному вирішенні задачі є функцією узагальненої координати φ , проте в силу зробленого припущення про малість зміни кутів повороту ланок системи величину J можна вважати постійною.

Потенційна енергія системи:

$$\Pi = P_1 y_E + P_2 y_G + P_3 y_C,$$

де y_E , y_G , y_C – ординати точок E , G , C .

Підставляючи у вираз для потенційної енергії:

$$y_E = 2r_1 \sin \varphi, \quad y_G = r_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} r_2 \sin \varphi_2, \quad y_C = r_1 \sin \varphi + r_2 \sin \varphi_2.$$

Отримуємо:

$$\Pi = (2P_1 + P_2 + P_3) r_1 \sin \varphi + \left(\frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) r_2 \sin \varphi_2. \quad (5)$$

Зауважимо, що при диференціюванні виразу (5) по узагальненій координаті φ потрібно враховувати залежність кута φ_2 від φ , причому в силу знайдених вище кінематичних співвідношень:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi} = \frac{\Omega_{2z}}{\Omega} = \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_3)}{r_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Отже,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = P r_1,$$

$$P r_1 = \left[(2P_1 + P_2 + P_3) \cos \varphi + \left(\frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) \frac{\cos \varphi_2 \sin(\varphi - \varphi_3)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] r_1.$$

При малій зміні кутів φ , φ_2 , φ_3 приведенний момент $P r_1$ можна вважати постійним, а вираз для потенційної енергії записати у вигляді:

$$\Pi = P_0 r_1 \varphi,$$

$$\text{де } P_0 = 2P_1 + P_2 + P_3 + \left(\frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) \frac{\cos \varphi_2^0 \sin \varphi_3^0}{\sin(\varphi_2^0 - \varphi_3^0)}.$$

Випишемо вираз для магнітної енергії системи:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2 + \frac{1}{2} L_{10} i i_0.$$

Коефіцієнт взаємної індукції L залежить від положення якоря всередині соленоїда, і, отже, від кута повороту φ кривошипа OA . При малих кутах φ функцію $L_{10}(\varphi)$ можна розкласти в ряд Тейлора і знехтувати квадратичними членами:

$$L_{10}(\varphi) = L_{10}(0) + \left. \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi.$$

При цьому магнітна енергія системи набуде вигляду:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10}(0) i_0 i + f i \varphi,$$

$$\text{де } f = i_0 \left. \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \text{const}.$$

З огляду на те, що ємності в електричному ланцюзі відсутні і електрична енергія дорівнює нулю, складемо функцію Лагранжа для даної електромеханічної системи:

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - P_0 r_1 \varphi + \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10}(0) i_0 i + f i \varphi.$$

Якщо знехтувати тертям в шарнірах, то диссипативна функція системи буде визначатися тільки втратами на джоулево тепло:

$$\psi = \frac{1}{2} R i^2.$$

Узагальнення неконсервативної сили механічної природи в системі відсутні, тому рівняння Лагранжа-Максвелла мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial i} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial i} = u.$$

Виконуючи операції диференціювання, отримуємо:

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi} + P_0 r_1 - f i &= 0; \\ L_{11} \frac{di}{dt} + f \dot{\varphi} + R i &= u. \end{aligned} \quad (6)$$

Диференціальні рівняння (6) описують процеси, що відбуваються в механічній та електричній частинах пристрою.

Для моделювання роботи механізму задамося конкретними значеннями параметрів:
 $J = 5,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $P_0 = 150 \text{ Н}$, $r_1 = 0,4 \text{ м}$, $f = 0,55 \text{ В}$, $L_{11} = 12 \text{ мГн}$, $R = 0,1 \text{ Ом}$, $u = 12 \text{ В}$.

Моделювання виконаємо з використанням пакета Mathcad. Нижче наведено блок рішення системи рівнянь (6):

$$\begin{aligned} &\text{Given} \\ &J \cdot \varphi''(t) + P_0 \cdot r_1 - f \cdot i(t) = 0 \\ &L_{11} \cdot i'(t) + f \cdot \varphi'(t) + R \cdot i(t) = u \\ &\varphi(0) = 0 \quad \varphi'(0) = 0.001 \\ &i(0) = 0 \quad t := 0, 0.01 \dots 2 \\ &\begin{pmatrix} \varphi \\ i \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} \varphi \\ i \end{pmatrix}, t, 2 \right] \quad \omega(t) := \frac{d}{dt} \varphi(t) \end{aligned}$$

На рис. 2–5 представлені результати моделювання.

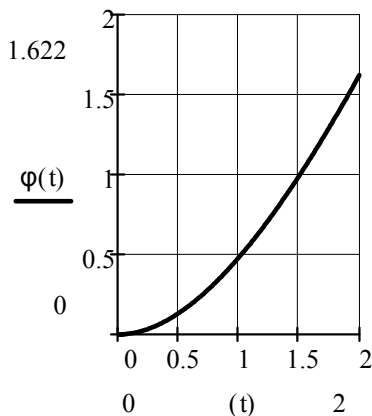


Рис. 2. Залежність кута $\varphi(t)$ від часу t

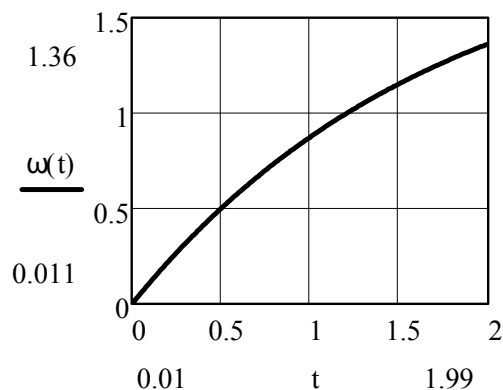


Рис. 3. Залежність кутової швидкості $\omega(t)$ від часу t

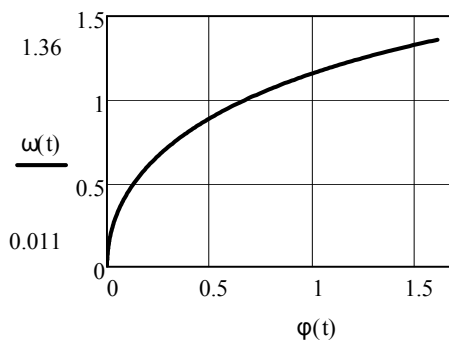


Рис. 4. Залежність сили струму $i(t)$ від кута $\varphi(t) - \omega(t)$

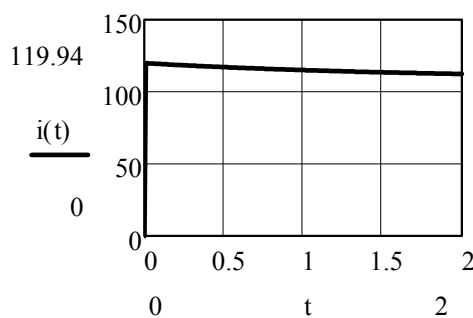


Рис. 5. Фазовий портрет в координатах від часу t

Із системи рівнянь (6) можна знайти час τ між подачею напруги на обмотку соленоїда і початком руху гальмівної колодки:

$$\tau = \frac{L_{11}}{R} \cdot \ln \frac{fu}{Ju - R\eta P_0}.$$

Початок руху якоря можливо лише за умови:

$$u > \frac{R\eta P_0}{f}.$$

Це співвідношення вирішує завдання про величину мінімальної напруги, при якій можлива робота електромагнітного гальма.

ВИСНОВКИ

Використання запропонованої математичної моделі електромагнітного гальма і її реалізація в системі комп'ютерної алгебри Mathcad дозволяють проаналізувати і підібрати раціональні механічні і електричні параметри системи, що забезпечують потрібне функціонування пристрою.

У перспективі отримані результати можна буде використовувати в якості основи для створення більш точної моделі, яка враховуватиме нелінійні властивості системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мартыненко Ю. Г. Аналитическая динамика электромеханических систем : учебное пособие по курсу «Теоретическая механика» / Под ред. И. В. Новожилова. – М. : МЭИ, 1984. – 64 с.
2. Баранов П. Р. Новые конструкторские решения при создании электромагнитного привода тормозного устройства электродвигателей / П. Р. Баранов, В. Ю. Попов. – Интернет-журнал «Науковедение». – 2013. – № 3. – С. 1–7.
3. Соленков В. В. Асинхронный электродвигатель со встроенным комбинированным тормозным устройством на базе электромеханического тормоза и электромагнитной муфты / В. В. Соленков, В. В. Брель // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2011. – № 6. – С. 20–25.
4. Соленков В. В. Математическая модель ад с встраиваемым комбинированным тормозным устройством / В. В. Соленков, В. В. Брель // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2013. – № 6. – С. 24–31.
5. Исмагилов Ф. Р. Математическое моделирование динамических режимов электромагнитных демпфирующих элементов / Ф. Р. Исмагилов, Р. Р. Саттаров, М. Б. Гумерова // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2010. – № 5(40). – Том 14. – С. 86–90.